

10. gyakorlat Komplex számok.

1. Határozza meg a $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$.

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket:

a.) $3\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$, b.) $\frac{2 + i}{i(1 - 4i)}$.

3. Írja fel a következő komplex számok trigonometrikus alakját:

a.) $\sqrt{6} - i\sqrt{2}$, b.) $-4i$, c.) 8 .

4. Végezze el a következő gyökvonásokat:

a.) $\sqrt[3]{1}$ b.) $\sqrt[4]{-16}$, c.) $\sqrt[3]{1 + i\sqrt{3}}$.

5. Végezze el a következő hatványozásokat:

a.) $(1 + i\sqrt{3})^3$, b.) $(1 + i)^8$, c.) $(1 - i)^4$.

6. Oldja meg a komplex számok halmazán a következő egyenleteket:

a.) $z^3 = 1 + i$, b.) $|z| - z = 1 + 2i$, c.) $z^2 = \bar{z}$.

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!
(Az eredményt algebrai alakban adja meg.) (ZH, 2008.12.02. ill. 2004.12.16.)

a.) $z^2 + (1 + i)\bar{z} + 4i = 0$, b.) $2iz^3 = (1 + i)^8$.

8. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását,

amelynek a valós része pozitív és a képzetes része negatív. (ZH, 2008.12.02.)

$$\frac{7i + 3}{7 - 3i}z^4 + 8(\sqrt{3} + i) = 0.$$

9. Tegyük fel, hogy a z komplex számra teljesül, hogy z képzetes része nem 0, de a $z + \frac{1}{z}$ komplex szám képzetes része 0. Határozza meg z abszolút értékét, $|z|$ -t! (ZH, 2008.11.25.)

10. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását, amelynek mind a valós, mind a képzetes része negatív. (ZH, 2008.11.25.)

$$iz^6 = (7 + i)^2 + \frac{2 - 30i}{1 - i}.$$

11. Oldja meg az alábbi egyenleteket komplex számok körében! (ZH, 2007.12.05.)

a.) $2z + 3\bar{z} = 5 + 2i$, b.) $(2 + i)z^3 = -9 + 3i$. a.) $|z| + z = 2 + i$.

12. Hány 12. egységgyök van a komplex 8. egységgyökök között? (ZH, 2007.11.28.)
13. Milyen n -ekre ($n \in \mathbb{N}$) lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ komplex szám? (ZH, 2001.12.06.)
14. A kétezredik komplex egységgyökök között hány olyan van, melynek az ötödik hatványa nem egyenlő eggyel? (ZH, 2001.01.15.)
15. A kétezredik komplex egységgyökök közül hány olyan van, melynek az ezredik hatványa is eggyel egyenlő? (ZH, 2000.12.18.)
16. Határozza meg az összes olyan z komplex számot, amelyre $|z + i| = 1$ és $|z - i| = \sqrt{5}$ teljesül. (ZH, 2006.12.07.)
17. Határozza meg a z komplex számot, ha $z^n = 1$ és $z^m = z + 2$ teljesül valamely n és m pozitív egészekre. (ZH, 2006.11.30.)
18. Bizonyítsa be, hogy ha ε egy 10-edik és ε' egy 25-ödik egységgyök, akkor $\bar{\varepsilon}\varepsilon'$ egy 100-adik egységgyök. (ZH, 2005.11.03.)
19. Tetszőleges z komplex számra jelölje z^* azt a komplex számot, amit a komplex számsíkon z origó körüli, $+60^\circ$ -os (vagyis az óramutató járásával ellentétes irányú 60° -os) elforgatásával kapunk. Oldja meg a komplex számok halmazán a $z^2 = z^*$ egyenletet és az eredményt adja meg algebrai alakban. (ZH, 2004.12.16.)

20. Ismert, hogy a komplex számok kétdimenziós vektorteret alkotnak a valós számok felett,

azaz $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Lineáris leképezés/transzformáció-e a következő:

- a.) $z \Rightarrow \bar{z}$,
- b.) $z \Rightarrow |z|$,
- c.) $z \Rightarrow iz$.

Ha igen, akkor adja meg a leképezés/transzformáció mátrixát is!

21. Adja meg algebrai alakban az alábbi egyenletnek az összes olyan komplex megoldását,

amelynek a valós része és a képzetes része is negatív. (ZH, 2010.12.06.)

$$\frac{5 + 3i}{3 - 5i}z^5 + 16\sqrt{3} + 16i = 0.$$

22. Adja meg az alábbi egyenlet összes komplex megoldását kanonikus alakban.

$$(\sqrt{3} - i)z^4 = i.$$

(ZH, 2009.12.01.)

23. Adja meg kanonikus alakban az alábbi egyenlet összes olyan komplex megoldását,

melynek valós és képzetes része is nemnegatív. (ZH, 2009.11.24.)

$$z^7 - 27z = 0.$$